

# Эволюция математической физики

Сэр Гораций Лэмб

## THE EVOLUTION OF MATHEMATICAL PHYSICS

*Being the Rouse Ball Lecture for 1924,*

BY  
HORACE LAMB, Sc.D., F.R.S.,  
HONORARY FELLOW OF TRINITY COLLEGE

CAMBRIDGE  
AT THE UNIVERSITY PRESS  
1924

# Электронная книга проекта "Гутенберг" о Эволюции математической физики

Эта электронная книга предназначена для использования любым человеком в любой точке Соединенных Штатов и большинства других частей мира бесплатно и практически без каких-либо ограничений. Вы можете скопировать его, раздать или повторно использовать в соответствии с условиями лицензии Project Gutenberg, прилагаемой к этой книге, или онлайн по адресу [www.gutenberg.org](http://www.gutenberg.org). Если вы находитесь за пределами Соединенных Штатов, вам необходимо ознакомиться с законами страны, в которой вы находитесь, прежде чем использовать эту электронную книгу.

**Название:** Эволюция математической физики

лекция о Розы Болл в 1924 году

**Автор:** Сэр Гораций Лэмб

**Дата выхода:** 4 декабря 2024 [Электронная книга №74838]

**Язык:** Английский

**Оригинальная публикация:** кембридж: Издательство Университета, 1924

**Кредиты:** Лаура Натал Родригес (Изображения предоставлены цифровой библиотекой Hathi Trust).

\*\*\* НАЧАЛО ПРОЕКТА "ЭЛЕКТРОННАЯ КНИГА ГУТЕНБЕРГА " ЭВОЛЮЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ " \*\*\*

## ЭВОЛЮЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Будучи лекцией Роуз Болл в 1924 году,

АВТОР: ГОРАЦИЙ ЛЭМБ, доктор философии, F.R.S.,  
ПОЧЕТНЫЙ ЧЛЕН ТРИНИТИ-КОЛЛЕДЖА

КЕМБРИДЖ  
В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ UNIVERSITY PRESS  
1924

НАПЕЧАТАНО В ВЕЛИКОБРИТАНИИ

# ЭВОЛЮЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Основатель этой Лекции выбрал в качестве одного из своих особых интересов историю математики, как на протяжении веков, так и отраженную в исследованиях Университета. В кратком изложении он дал отчет о развитии предмета, который контрастирует с подробными трактатами предыдущих авторов своей концентрацией на основных моментах, а также теми проблесками, которые он дает о личностях математиков, чьи достижения он описывает, с их ограничениями и неудачами, а также их амбициями и успехами.

Изучение последовательных этапов эволюции любого предмета - привлекательное занятие, и много лет назад, выступая недалеко от этого места, я был вынужден рискнуть высказать некоторые предположения относительно идей, которые побудили и направили самые первые шаги в развитии греческой математики. Я даже осмелился сказать, не совсем в духе парадокса, что если бы какое-то одно научное изобретение могло претендовать на превосходство над всеми остальными, я был бы склонен предложить памятник неизвестному изобретателю математической *точки*, как первый шаг в том долгом процессе абстракции и идеализации, который достиг кульминации в науке (и не только математической) наших дней. Я помню, что сидевший рядом выдающийся инженер впоследствии заметил мне, что, если бы количество подписей соответствовало размерам объекта, который будет увековечен, он с радостью возглавил бы список. Еще более выдающийся астроном сказал мне, что все это выступление было тщательно продуманной научной шуткой. Такая дружеская сатира не поколебала моего мнения; но размышления о психологии примитивных математиков, какими бы привлекательными они мне ни казались, неизбежно ненадежны, и у меня нет соблазна снова углубляться в эту область. Задача, которую я попытался бы выполнить сегодня, состоит в том, чтобы проследить ведущие шаги в развитии этой великой традиции математической физики, в отличие от динамики и астрономии, которая зародилась в первые годы прошлого столетия и доминировала в физических спекуляциях до совсем недавнего времени, когда появились новые открытия и новые идеи, требующие более новых методов, не делая, однако, устаревшими старые. Земля, конечно, была пройдена и раньше, но, я думаю, не совсем с нынешней точки зрения. Меня интересуют не физические теории как таковые, а скорее математическая оболочка, которую они время от времени принимали. Моя цель - показать, как получилось, что мы унаследовали математическую схему, которая в своей окончательной форме охватывает такие физически разные предметы, как теплопроводность, гидродинамика, упругость, магнетизм, Электричество и Свет, и может быть включена в любой из них, присвоив символам собственные имена. Схема, конечно, допускает изложение в чисто абстрактной форме вообще без каких-либо физических ссылок, и это фактически было сделано; но ее главная ценность заключается в физических аналогиях, которым она способствует и в которых она возникла. Разработка шла непрерывно, хотя широкий размах конечного результата невозможно было предвидеть.

Время, которое я указал в качестве отправной точки, было особенно благоприятным. Великий вычислитель Эйлер охватил всю область математики и придал многим ее разделам почти окончательную форму, которую мы находим в наших учебниках. Лагранж, Лаплас и Лежандр разработали ньютоновскую астрономию и внесли важный вклад в общую динамику, а также, попутно, в анализ. Таким образом, когда внимание стало направляться на физические предметы, доступные математические ресурсы были намного выше того, что было доступно в любой более ранний период.

Отдельные вопросы, конечно, рассматривались ранее; например, изгиб стержней обсуждался Бернулли и Эйлером. Более важным с современной точки зрения является основание гидродинамики Эйлером, который сформулировал фундаментальные дифференциальные уравнения и приступил к их интегрированию, исходя из предположения о существовании потенциала скорости. Однако он осторожно отметил, что есть случаи, например, при равномерном вращении вокруг оси, когда это условие не выполняется. Теория плоских звуковых волн также была известна, и вряд ли мне нужно вспоминать тему вибрирующих струн с ее реакциями на анализ и долгими спорами, которые в результате возникли. Но отправная точка математической физики, в общепринятом ныне смысле этого термина, должна быть зафиксирована. Я думаю о том времени, когда бури Французской революции утихли и на смену им пришло сравнительное спокойствие ранней империи. Если требуется более определенная дата, мы, возможно, остановимся на 1807 году, который ознаменовался публикацией первых мемуаров Пуассона о звуке. Это касается сферических волн, волн в атмосфере переменной плотности и, что самое удивительное, волн конечной амплитуды. Он обнаруживает, что границы такой волны продвигаются с обычной скоростью звука, но опускает изучение постепенного изменения типа. Это было сделано Стоксом много позже. Я думаю, о Пуассоне можно сказать, что при всей его необычайной силе в решении проблемы, когда она была сведена к аналитической форме, и великих достижениях, которые стоят у него в активе, он был меньше озабочен физической интерпретацией своих результатов.

Тот же 1807 год еще более памятен первой частью исследований Фурье по теплопроводности, важность которых выходит далеко за рамки специального предмета. Таким выдающимся математиком, как Гамильтон, Максвелл и Кельвин, было трудно говорить о Фурье с взвешенной оценкой, будь то изобретательность его математических процессов, элегантность его результатов или его широкий философский кругозор, что особенно заметно в предисловии к его официальному трактату. У Фурье действительно было преимущество в том, что он сделал довольно разнообразную карьеру. Сначала его готовили к священству, затем не приняли в артиллерийскую школу (роялистов) с таким многословным замечанием, что низкое происхождение дисквалифицировало бы его, “даже если бы он был вторым Ньютоном”. Он стал учеником Нормальной школы, а позже профессором Политехнической школы. Он был включен в экспедицию Наполеона в Египет в качестве члена амбициозного Египетского института, который предлагалось основать и президентом которого был Монж. Вернувшись во Францию в 1802 году, он был назначен префектом департамента Изер, возможно, из-за административного таланта, который, как говорят, он проявил в Египте, и именно в Гренобле он начал сочинять свое классическое произведение. Его последующая история, хотя и интересная и почетная, вряд ли нас интересует, но факты, которые я упомянул, предполагают, что его разнообразный и ответственный опыт, а также изучение литературы, которые были обязательной частью его раннего образования и в которых он, как говорят, преуспел, не остались без влияния на его работу или на яркий стиль, в котором она изложена.

В самом начале его книги мы впервые сталкиваемся с процессом, который сейчас кажется настолько очевидным и знакомым, что упоминание о нем может показаться тривиальным. Я имею в виду устройство, с помощью которого скорость изменения физического свойства в любой точке среды рассчитывается в терминах ее потока в элемент объема. Но вряд ли это могло быть вполне очевидным, поскольку прошло много лет, прежде чем такой простой вопрос,

как уравнение непрерывности в гидродинамике, был доказан таким образом Уильямом Томсоном, который также указал на его полезность для выражения уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0$$

в криволинейных координатах. В более поздний период этот процесс получил блестящее продолжение в руках Максвелла в его теории газов, где он был применен к потоку импульса, а также энергии.

Математические методы, используемые Фурье при решении специальных задач, требуют тщательного изучения. В их нынешнем виде они часто не удовлетворяли бы даже снисходительным стандартам математической строгости, и действительно, они, похоже, вызвали сомнения в умах Лапласа, Лагранжа и Лежандра, которые сформировали уважаемую комиссию, которой было поручено изучить один из его мемуаров. Но это модели того, что можно назвать математическим экспериментом; и в любом случае в конце концов они оказываются успешными, а результаты легко проверяются. Форма, опять же, в которой представлены эти результаты, я думаю, совершенно не похожа ни на что из того, что было раньше, особенно в части появления определенных интегралов, но небольшое рассмотрение показывает, что было бы трудно представить что-либо более приспособленное к конкретным обстоятельствам или действительно более ясное. Один специальный вопрос, рассмотренный Фурье, может быть отмечен за его связь с более поздними предположениями. Обсуждался вопрос о том, обладает ли земля внутренним запасом тепла или же она полностью зависит от солнца. Вывод Фурье состоит в том, что внутренние температуры не зависят от влияния солнца, но последнее в основном отвечает за температуру поверхности. Среди предвосхищений Фурье современной практики мы можем привести его обращение к графическим методам решения уравнений и особенно его настойчивость в необходимости того, чтобы результаты можно было при необходимости привести к числовой форме.

Общие уравнения гидродинамики датируются Эйлером (1755), но прошло много времени, прежде чем из них были сделаны какие-либо приложения, кроме самых простых. Теория волн на воде была предложена Французской академией в качестве темы эссе на соискание премии за 1815 год. Предложенная задача заключалась в том, чтобы проследить влияние данного начального возмущения поверхности. Мемуары Коши, которому была присуждена премия, примечательны тем, что содержат первое удовлетворительное доказательство сохранения безвращательного свойства в той части жидкости, которая обладает им в любой данный момент. Аналитические трудности специальной задачи значительны, главным образом из-за того, что не существует определенной скорости волны, но гений автора восполнил то, чего не хватало, и примечания, впоследствии приложенные к его мемуарам, содержат запас важных аналитических результатов, относящихся главным образом к определенным интегралам. В частности, здесь мы впервые встречаемся с интегралами, известными впоследствии под именем Френеля, который столкнулся с ними в своей работе по физической оптике. Параллельные и независимые мемуары Пуассона, который сам был отстранен от участия в

конкурсе на премию, более подробно излагают суть проблемы, но соглашаются с основными результатами. Примечательно, что ни один из авторов не останавливается на рассмотрении более простых и фундаментальных свойств простой гармонической последовательности волн. Это было оставлено для Зелени и Воздушности и по-разному расширено Стоксом. Не следует упускать из виду, что работа и Коши, и Пуассона стала возможной только благодаря анализу Фурье произвольной функции на простые гармонические составляющие. Вскоре после этого Пуассон занялся проблемой звуковых волн в неограниченной среде из-за произвольных начальных условий. Результат приведен в том, что Эйри (я думаю) назвал неудовлетворительной формой определенного интеграла. Пуассон не останавливался на этой интерпретации, но и здесь пришлось ждать проницательного гения Стокса. Затем признается, что формула Пуассона, отнюдь не неудовлетворительная, дает именно то, что хотелось бы знать, в наиболее удобной и уместной форме.

Начиная с этого периода поток производства был настолько быстрым и охватывал так много тем, что довольно трудно рассматривать его в какой-либо упорядоченной последовательности. Одним из очень важных вопросов является развитие теории упругости. Интерес к этому предмету был возрожден экспериментами Хладни на вибрирующих пластинах, которые стали неотъемлемой частью лекций по акустике, которые он читал в различных местах, как и большинство курсов по этому предмету с тех пор. Опытный экспериментатор, наделенный тонким музыкальным слухом, он смог не только вызвать огромное количество фигур узловых линий, образованных песком, посыпанным на пластинки, но и назначить их относительную высоту звука и даже сформулировать приблизительные числовые соотношения. Его лекции имели большой успех и, по-видимому, вызвали интерес в мире моды, примерно такой же, какой могла бы вызвать лекция о мыльных пузырях в наши дни. Его визит в Париж стал поводом, по предложению Наполеона, для того, чтобы теория фигур, ныне известная под его именем, была предложена Академией в качестве темы призового эссе за 1811 год. Среди конкурсанток была одна из самых стройных женщин, вошедших в историю математики, мадемуазель Софи Жермен. Эта дама черпала вдохновение на страницах "Монтюкль" и с большим энтузиазмом посвятила себя изучению математики, к великому огорчению своих родителей. Лагранж, как ни странно, предупредил ее, что задача безнадежна, и действительно, ее попытки оказались не очень успешными, хотя она и получила приз на последующем конкурсе. Как и другие более ранние авторы по этому вопросу, она предположила, по аналогии с проблемой Эйлера о стержне, что энергия деформации пластины является квадратичной функцией основных кривизн. Это достаточно правильно, но выбор конкретной функции был неудачным. Дальнейшая история проблемы очень интересна математически, но завела бы нас слишком далеко. Этот вопрос не мог быть удовлетворительно решен до тех пор, пока общая теория упругости не получила дальнейшего развития и не были установлены соотношения между напряжениями и деформациями. Дополнительный импульс к изучению этого предмета пришел от волновой теории света, которая быстро развивалась под руководством Юнга и Френеля. Первые очерки общей теории упругих тел были сделаны Навье, Пуассоном и Коши. Их исследования заслуживают внимания как включающие первые систематические попытки вывести свойства тела из явной гипотезы о молекулярной структуре. Слово "молекула", это правда, встречается снова и снова в предыдущей математической литературе, но обычно его значение то же, что мы придаем слову "частица", а именно небольшая часть вещества, действительно рассматриваемая как непрерывная. Лаплас, опять же, дал теорию капиллярности, основанную на концепции сил, обладающих очень малым диапазоном

действия, но вещество рассматривается как непрерывное, и эта работа на самом деле была развитием теории притяжения с обобщенным законом силы. В мемуарах Навье и Пуассона и, в значительной степени, в мемуарах Коши, упругое твердое тело понимается как статическое расположение дискретных молекул, разделенных конечными интервалами. Молекулы рассматриваются как математические точки, и предполагается, что взаимные силы зависят только от расстояния, независимо от направления. Диапазон действия сил, хотя и мал, предполагается большим по сравнению с внутримолекулярными пространствами. Все это, конечно, возможная концепция и подходящий материал для математического изучения, соответствует она реальности или нет. Однако было сделано еще одно предположение, которое было подвергнуто большому сомнению, а именно. что смещения последовательных молекул при деформации тела являются непрерывными функциями координат. Применительно к изотропным телам, в которых конфигурация молекул вокруг любой точки считается совершенно неправильной, это вряд ли можно оправдать, но в случае кристаллической структуры в ее пользу можно сказать больше. Непрерывность, которая предполагается в современных теориях упругости, относится, конечно, к средним значениям, а не к отдельным молекулам. Без дальнейшего изучения молекулярных предположений, некоторые из которых излишне ограничены, в то время как рассуждения иногда трудно проследить, мы можем отметить, что Навье и Пуассон в случае изотропии пришли к уравнениям, которые совпадают с общепринятыми, за исключением одного конкретного. Вывод о том, что существует неизменное соотношение между объемной упругостью и жесткостью вещества, долгое время был предметом споров, но не выдержал критики Стокса и экспериментов Кирхгофа. Получив свои уравнения, Пуассон приступает к их применению к различным специальным задачам, таким как радиальные колебания сферы, боковые колебания стержней и симметричные колебания круглых пластин. Последнее особенно искусно представляет собой анализ, включающий функции Бесселя как для действительных, так и для мнимых аргументов, и сводится к численным результатам. Вскоре за этой статьей последовала другая, посвященная проблеме плоских упругих волн в изотропном твердом теле. Различают два типа, характеризующихся продольными и поперечными колебаниями соответственно, и находят соответствующие скорости волн.

Значительное улучшение теории было внесено Коши, который положил начало современной теории напряжений и деформаций. В качестве альтернативы методу, который он впервые применил, он отказывается от всех явных упоминаний молекул и рассматривает твердое тело как практически непрерывное. Расширяя понятие давления, которое было распространено в гидростатике, он предполагает, что силу между любыми двумя соседними частями вещества можно рассматривать как состоящую из действий между двумя слоями чрезмерно малой глубины по обе стороны границы раздела, и, соответственно, ее можно рассматривать как поверхностную силу или “напряжение”. Далее он исследует взаимосвязь между напряжениями в различных плоскостях и выражает их геометрически с помощью эллипсоида напряжений. Я полагаю, что такое использование эллипсоида для представления соотношений между различными направленными свойствами в механике является оригинальным для Коши, который применил его также в теории деформаций, а также в более знакомом вопросе о моментах инерции. Его уравнения для изотропного вещества, полученные этим вторым методом, основаны на гипотезе о том, что главные оси напряжения и деформации совпадают и имеют ставший обычным вид с двумя независимыми постоянными упругости. Вся процедура на самом деле является той, что описана в современных книгах. Следует также упомянуть, что Коши в

своей работе о деформациях впервые вводит понятие бесконечно малого вращения элемента, впоследствии использованное Стоксом и Гельмгольцем.

Затем Коши занялся теорией кристаллических твердых тел, на этот раз, естественно, на основе предполагаемого упорядоченного расположения молекул, но его результаты не выдержали проверки экспериментом и не дали удовлетворительного объяснения двойного лучепреломления. Истинная теория упругих твердых тел в общем случае, свободная от всех молекулярных гипотез, была дана позже Грином, чья работа является первым примером применения энергетических методов к физике сплошных сред, причем аналитический процесс является адаптацией вариационного метода Лагранжа. , К счастью, в мою задачу не входит обсуждать эти вещи с точки зрения физической оптики или рассматривать продолжительные и упорные попытки сменяющих друг друга физиков построить механическую модель эфира, которые в настоящее время окончательно оставлены. В настоящее время реальный выход для теории упругих волн, их отражения и преломления находится в связи с сейсмологией, где это привело к важным результатам. Главный интерес теории упругости для нас в данный момент состоит отчасти в постепенном освобождении от молекулярных допущений, а отчасти в том, что аналитическим соотношениям, которые она включала, было суждено найти более широкую и важную сферу применения. Возьмем очень простой пример: в уравнениях равновесия несжимаемого изотропного твердого тела

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0, \text{ \&c., \&c.,}$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 0,$$

используются

такие символы, которые присутствуют в самых разных областях, и следует помнить, что именно на этом примере Томсон в своих ранних размышлениях построил аналогии между упругими перемещениями и вращениями, с одной стороны, и распределениями электрической и магнитной силы в свободном пространстве, с другой.

Чтобы понаблюдать за ростом математического электричества, мы должны вернуться к 1811 году, когда Пуассон заложил основы электростатики как раздела теории притяжения. Принимая гипотезу о двух электрических жидкостях, он отмечает, что результирующая электрическая сила в любой точке внутри проводника должна быть равна нулю. В сочетании с законом электрического взаимодействия Кулона и соотношением Лапласа между нормальной силой и поверхностной плотностью это сразу привело к распределению электричества по заряженному проводнику в форме эллипсоида. Пуассон далее вводит концепцию (но не название) электрического потенциала и устанавливает условия, которым он должен удовлетворять в любой точке поля благодаря системе наэлектризованных проводников. В частности, он исследует индуцированное распределение на сфере из-за любой системы внешних зарядов.

Наконец, проявив триумф аналитического мастерства, он решил классическую задачу о двух наэлектризованных сферах.

С нынешней точки зрения, больше нечего записывать до открытия Эрстедом действия электрического тока на магнитную стрелку (1820). За этим почти сразу последовал анализ Савартом магнитной силы на силы, обусловленные бесконечно малыми элементами электрической цепи, и простое правило, которое он сформулировал. Это привело Ампера к изучению механического взаимодействия между электрическими цепями. Он проанализировал это на силы между элементами цепей, действующие в соединяющих их линиях и подчиняющиеся закону действия и противодействия. Его теория была основана на нескольких правдоподобных предположениях и на серии экспериментов, разработанных в строго математическом духе, чтобы сузить круг различных вопросов, подлежащих решению. На его работу сейчас редко ссылаются, но она демонстрирует математические навыки, которые он проявлял ранее в Вариационном исчислении, а также в других направлениях. Это правда, что мы все еще находимся в атмосфере действия на расстоянии, и Ампер фактически апеллирует к примеру Ньютона и Гравитации, но только с оговоркой Ньютона. Он не утверждает, что пришел к окончательному объяснению явлений, а лишь установил формулу, по которой они могут быть вычислены. Следствия, которые он вывел, более значительны, чем сама формула элементарного притяжения. Во-первых, он обнаруживает, что результирующее воздействие замкнутого контура на элемент другого контура зависит от вектора, который впоследствии отождествляется с магнитной силой. Затем он находит силу, действующую на небольшую замкнутую цепь, и доказывает, что она идентична силе, действующей на элементарный магнит. Далее следует знакомое представление тока магнитной оболочкой, а также теория о том, что свойства намагниченного тела обусловлены токами, циркулирующими в молекулах. Здесь впервые были скоординированы две области физики, до сих пор отличавшиеся друг от друга.

Взгляды Ампера, в силу их новизны, естественно, вызвали сначала некоторое недоверие. Предубеждения, особенно когда они имеют определенную форму, умирают с трудом; и следует отметить, что большой труд Пуассона о магнетизме, в котором предполагается проверка гипотезы о двух магнитных жидкостях, почти совпадает по времени с последней публикацией Ампера.

Значительная часть работ Пуассона по магнетизму стала классической в том смысле, что последующие авторы не нашли ничего лучшего, чем воспроизвести ее. Она в значительной степени независима от теории двух жидкостей и на самом деле является теорией магнитных элементов, впоследствии явно трактуемой как таковая, без дополнительных гипотез, в расширениях, приведенных позже Томсоном. Преобразование, посредством которого потенциал непрерывного расположения магнитных элементов выражается как результат распределения воображаемого магнитного вещества по объему и по поверхности, теперь появляется впервые. В своей трактовке магнитной индукции Пуассон воображает, что его две жидкости могут свободно перемещаться в молекулярных пространствах, которые для определенности он рассматривает как сферические. Это последнее предположение может быть принято просто как иллюстративное, хотя оно приводит к определенному, а иногда и невозможному значению коэффициента. Решенные конкретные задачи, а именно.

намагничивание сферической оболочки и эллипсоида однородным полем сохраняет интерес независимо от этой специальной гипотезы.

Непосредственно последовавшие годы были отмечены главным образом исследованиями Навье, Коши и Пуассона в области упругости, на которые уже было обращено внимание. Далее мы переходим к "Эссе Грина об электричестве и магнетизме" (1828). Математическая теория электростатики, начатая Пуассоном, здесь возобновлена и в некотором смысле завершена. Лечение основано на теореме, которая в настоящее время обычно цитируется под именем автора. Новым моментом здесь является не переход от объемных интегралов к поверхностным, поскольку это можно было найти у Пуассона, а то, что это первый пример взаимных отношений, которые пронизывают не только динамику, но и все разделы физики. В данном случае это соотношение между двумя различными распределениями электроэнергии, но для перевода его на язык гидродинамики или акустики достаточно придать символам подходящие значения. Далее, с математической точки зрения мы рассматриваем особенности гармонических функций. Электростатические теоремы Грина воспроизведены в большинстве современных учебников. Среди оригинальных результатов мы можем отметить экранирующий эффект проводящих поверхностей, распределение электричества по сферическому проводнику из-за внутренних или внешних зарядов и теорию конденсаторов.

Явления взаимной индукции и самоиндукции электрических токов были открыты Фарадеем в 1831-35 годах, но прошло много времени, прежде чем они получили явное математическое исследование, и еще больше, прежде чем было признано, что собственное описание Фарадея в терминах силовых линий может быть облечено в точную математическую форму. Работа Ф. Неймана (1845-47) была дополнением к работе Ампера и включала идеи того же рода. Дополнительным приведенным экспериментальным фактом был закон Ленца. Когда происходит относительное движение двух контуров или контура и магнита, индуцируются токи и, как следствие, возникают механические силы, которые можно рассчитать по формулам Ампера. Упомянутый закон состоит в том, что смысл индуцированных токов таков, что эти механические силы действуют в противоположность относительному движению. Нейман предполагает, что это верно также в отношении бесконечно малых элементов, на которые могут быть разделены цепи, и, кроме того, что электродвижущая сила индукции пропорциональна скорости относительного движения, силе индуцирующего тока или магнита и составляющей (с обратным знаком) механической силы в направлении относительного движения. Для двух первых из этих предположений имелись экспериментальные доказательства Фарадея и других, последнее было принято как простейшее предположение, согласующееся с законом Ленца. Исходя из этого, он доказывает, что общий ток, индуцируемый в цепи движением магнитного полюса, пропорционален изменению потенциала полюса по отношению к единице тока в цепи и, опять же, изменению потока магнитной силы через цепь. Это действительно правило Фарадея, за исключением того, что оно не выражено таким количеством слов в терминах силовых линий. Во второй статье он показывает, что механическое воздействие между двумя токами зависит от взаимного потенциала двух цепей, а именно.

$$\iint \frac{\cos \epsilon \, ds \, ds'}{r},$$

и относит

электродвижущие силы индукции к изменениям значения этой функции.

Мы все еще находимся в атмосфере действия на расстоянии, и поэтому не было ничего противоестественного в том, что Вебер и другие искали объяснение как механическим, так и индуктивным эффектам в модификации закона Кулона о силе взаимодействия электрических зарядов. Поскольку действия, подлежащие объяснению, зависят от темпов изменений, пришлось применить насилие к прежним понятиям, и были введены термины, зависящие от взаимных скоростей и ускорений. Результирующий закон Вебера, который был сформулирован таким образом, чтобы не вступать в конфликт с сохранением энергии, долгое время привлекал внимание континентальных авторов благодаря математической точности процессов, с помощью которых из него можно было вывести результаты Ампера и Неймана. От нее окончательно отказались только после того, как Гельмгольц показал, что при определенных условиях она влечет за собой неустойчивое электрическое равновесие, а также другие парадоксальные последствия.

Год (1846), в котором был обнародован закон Вебера об электрической силе, также очень приблизительно знаменует начало современной тенденции игнорировать действие на расстоянии и принимать во внимание среду, через которую происходят электрические и магнитные воздействия. Упругие аналогии Томсона уже упоминались. Другая аналогия, между электростатикой и теплопроводностью, была отмечена им немного ранее и использовалась для иллюстрации различных положений в книге "Аттракционы". Математическая теория магнетизма, которой затем занялся Томсон, была изложена в форме, свободной от всяких гипотез, магнитные жидкости Пуассона и других теперь заменены понятием магнитной поляризации. Он также дополнил грамматику континуумов, развив концепции и свойства соленоидального и пластинчатого распределений магнетизма, которые были предложены исследованиями Ампера. Два определения магнитной силы внутри магнита, впоследствии выделенные как магнитная сила и магнитная индукция, также впервые вводятся здесь. Все эти мемуары являются образцом научного изложения и напоминают о "величественном стиле" классических математиков, и особенно Гаусса.

Последний шаг к полной формулировке современных математических соотношений Электричества состоял в выражении магнитной силы, или, скорее, магнитной индукции, в терминах вектора, известного теперь под названием электрического импульса. Этот вектор или его аналоги проявляли себя различными способами. У нас есть первое исследование Кирхгофа законов индукции в трехмерных проводниках, основанное на законе электрического взаимодействия Вебера. Почти одновременно у нас появилась статья Стокса по динамической теории дифракции, которая в настоящее время важна не столько как вклад в оптику, сколько как

содержащая расчет волн в упругой среде, вызванных любым начальным возмущением. Это было поставлено в зависимость от интегрирования Пуассоном общего уравнения звука, и именно здесь мы впервые встречаемся с полной интерпретацией этого решения, которое привело к решению задачи об упругих волнах. Отношение к настоящему вопросу состоит, однако, в кинематическом процессе, посредством которого перемещения в любой среде выражаются в терминах расширений и вращений, так что на языке Клиффорда все сводится к “брызгам и завихрениям”. Тот же процесс повторяется несколько лет спустя в замечательных мемуарах Гельмгольца о вихревом движении, где мы явно встречаемся с аналогией отношений между электрическими токами и магнитной силой с отношениями между вихрями и скоростями жидкости. Эта аналогия развивается ближе к концу исследования, но теперь мы можем видеть, что она с самого начала подразумевалась в самом определении вихря. В обоих исследованиях связь устанавливается с помощью вспомогательного вектора, который по электрической аналогии соответствует электрическому импульсу Максвелла.

Статья Максвелла “О силовых линиях Фарадея”, написанная вскоре после того, как он получил ученую степень, сейчас, возможно, мало читаема, но заслуживает внимания хотя бы из-за введения, написанного в его собственном несравненном стиле, где мы находим уже заложенные основы, по которым должны были развиваться его последующие рассуждения. С математической точки зрения статья представляет собой всеобъемлющее утверждение, без намека на теорию, описывающее известные факты электромагнетизма в терминах системы векторов, которые, как предполагается, существуют во всех точках поля. Здесь уточняется идея Фарадея о силовых линиях, будь то электрических или магнитных, посредством аналогии с движением несжимаемой жидкости. Новый вектор, введенный здесь в электромагнетизм, - это вектор импульса, и скорость его изменения показана динамическим аргументом, ответственным за электромагнитную индукцию. Доказательство этого зависит от выражения для энергии поля в терминах интеграла, распространяющегося по пространству, и является выводом из закона сохранения энергии. Динамическая связь между пондермотивными и индуктивными силами была в общих чертах обозначена Гельмгольцем в его знаменитом трактате, и это, возможно, было первым предложением к последующей динамической теории Максвелла.

Теперь, по сути, путь к определенной теории Максвелла был ясен, насколько это касалось математической схемы. Как мы все знаем, он рискнул пойти еще дальше и заглянуть за математические соотношения, чтобы глубже проникнуть в суть вопроса и, если возможно, понять физическое или механическое значение аналитических символов. Рассматривая вопрос как динамический, он набросал механическую модель эфира, которая должна воспроизводить известные электрические соотношения, скорее с целью убедить себя, что такая модель возможна, чем в качестве определенного детального объяснения. За этим последовала классическая статья, в которой было показано, что законы электромагнетизма можно вывести из динамических соображений, без предположения о каком-либо конкретном механизме. Заключительное изложение его трактата, в котором используются обобщенные уравнения Лагранжа, слишком знакомо, чтобы нуждаться в дальнейшем упоминании. Предпочитаем ли мы рассматривать это как аналогию или объяснение, это поразительный пример оригинальности гения Максвелла.

На этом мы можем надлежащим образом завершить наш обзор, поскольку я не берусь быть проводником в последующей истории, которая все еще находится в процессе становления.

Следует, однако, отметить, что Максвелл, который, так сказать, положил начало одному периоду математической физики, был также в некотором смысле инициатором другого, своей работой по теории газа, которая включала создание молекулярного исчисления.

Оглядываясь назад на эту долгую историю, мы можем проследить во всех деталях тенденцию к росту. Рассматриваемый нами период начался под влиянием великих достижений Лапласа и Лагранжа в развитии ньютоновской астрономии. Понятие действия на расстоянии, хотя сам Ньютон и не рассматривал его как последнее слово в этом вопросе, имело большой успех, и когда область физической астрономии начала полностью осваиваться, математики, обратившие свое внимание на физические вопросы, вполне естественно предположили, что та же концепция будет плодотворной в других направлениях. К счастью, существовал один физический процесс, к которому эти идеи явно неприменимы. Тепло действительно представлялось материальным, и более того, текучим веществом, но вряд ли молекулярным, и его передача по проводникам, естественно, рассматривалась как непрерывный процесс. Этому мы обязаны работе Фурье, которая стоит сама по себе, вне исторического порядка развития, за исключением того, что решение конкретных проблем включало аналитические процессы и приводило к аналитическим теоремам, имевшим гораздо более широкую сферу применения. Когда принималась во внимание молекулярная структура тел, как на заре изучения упругости, этапы были несколько расплывчатыми и неопределенными, и я думаю, что сами авторы, должно быть, испытали некоторое облегчение, когда наконец пришли к своим дифференциальным уравнениям и почувствовали себя действительно как дома. Это было большим улучшением, когда можно было отказаться от рассмотрения молекулярных сил и заменить их теорией напряжений Коши. Та же тенденция отбрасывать ненужные и непроверяемые гипотезы была продемонстрирована в электричестве при переходе от Пуассона и Ампера к Томсону и Максвеллу.

Одна из особенностей, с которой мы сталкиваемся в наш период, - это откровенное обращение к интуиции. Это заметно уже в случае Фурье, как уже было указано, но это проходит через всю школу. Даже Коши, который был или стал в некотором роде пуристом по стандартам своего времени, иногда не уклонялся от работы с расходящимися интегралами, но в конце всегда умудрялся прийти к правильному результату. О математической работе, выполняемой любыми, кроме совершенно некомпетентных, руками, можно сказать следующее: слишком небрежная индукция рано или поздно выдает себя и приводит к пересмотру всего расчета. Великие математики, какую бы вольность они себе ни позволяли, всегда обладали верным инстинктом, спасавшим их от логической катастрофы. Роль, которую интуиция играет в математических открытиях, иногда игнорировалась или даже отрицалась. Но разве не Гаусс, когда его спросили о ходе исследования, которым он занимался, ответил, что он пришел к теоремам и что осталось только найти доказательства? Что касается таких вещей, как теоремы существования, мы, конечно, не должны рассматривать, во всяком случае, события более ранней половины нашего периода. Первый пример осознания такого требования, который я могу вспомнить, встречается у Грина, но он сразу же переходит к физическим концепциям. Он хотел убедиться в существовании функции, удовлетворяющей уравнению Лапласа, которая должна обращаться в нуль на замкнутой поверхности и иметь определенную особенность в данной внутренней точке. Он считает достаточным отметить, что это случай неизолированной проводящей поверхности, находящейся под воздействием внутреннего заряда. Такое же использование физических доказательств можно найти у Максвелла и в особой степени в работах покойного лорда Рэлея. Физико-математический специалист может обоснованно претендовать на определенную

свободу действий в этом отношении. Он часто имеет дело с Гауссом; утверждение бесспорно, но, будучи занят своими делами, он оставляет строгое доказательство аналитику, который действительно должен быть очень благодарен ему за изысканное логическое упражнение, которое он предоставил.

Еще одной особенностью эволюции является постепенное распознавание геометрических или физических значений в различных символах или группах символов, которые постоянно повторяются. Это особенно характерно для более поздних стадий. Для Лапласа и его школы потенциал был просто удобной математической единицей; название с его ассоциациями пришло много позже от Грина. Уравнение

$$\nabla^2 \phi = 0$$

потеряло большую часть своего значения, когда его преобразовали, что было необходимо для некоторых целей, в полярные координаты, и распознавание общих свойств функции было отложено. Само уравнение впервые получило явную интерпретацию в руках Максвелла, и то же самое справедливо в отношении ставших теперь привычными концепций "дивергенции", "концентрации" и так далее. И вряд ли нужно говорить, что понятие оператора, в отличие от результата, относится к более позднему периоду. Терминология физических сущностей или качеств, таких как "изотропия", "проницаемость" и так далее, во многом обязана Кельвину с его обширными ономастическими способностями.

Я имел в виду в основном разработку общих принципов и методов, но это, конечно, не вся история. Полная история должна была бы рассматривать в некоторых деталях специальные проблемы, которые время от времени возникали сами собой. Импульс к общей теории действительно, часто возникал таким образом. Например, проблема двух наэлектризованных сфер дала импульс электростатике, в то время как рисунки Хладни с узловыми линиями постепенно привели к теории упругости. Более того, именно в специальных приложениях особенно проявляется мастерство аналитика, и результаты часто представляют большой интерес и ценность даже с чисто математической точки зрения. Нам нет необходимости возвращаться к теории Притяжения или к Фигуре Земли, которая вызвала Сферические Гармоники. Теплопроводность случайно привела к функциям Бесселя и, прежде всего, к теоремам, особенно связанным с именем Фурье, в то время как задача Пуассона о двух наэлектризованных сферах является ярким примером решения функционального уравнения. Кельвину мы обязаны методом электрической инверсии, включая поразительное решение проблемы наэлектризованной сферической чаши, которая привлекла внимание Грина, и симметричной обработкой сферических гармоник. Максвеллу мы обязаны исключительно красивым решением проблемы токовых слоев, новой интерпретацией сферических гармоник и другими интересными результатами и точками зрения, разбросанными по его трактату. В качестве примера более систематического применения математической техники мы можем

снова обратиться к волновой задаче Коши, где впервые появляются интегралы, впоследствии приписываемые Френелю.

В этом кратком очерке я попытался воздать должное особенно пионерам того периода; заслуги и достижения их более поздних преемников свежи в нашей памяти. Я считаю удачным, что первые эссе о развитии математической физики были написаны людьми, чьи достижения охватывали всю математику, и которые, таким образом, имели в своем распоряжении обильные аналитические ресурсы. Действительно, можно утверждать, что они предоставили своим преемникам почти все аналитическое оборудование вплоть до сравнительно недавнего времени. Вы можете поискать, например, тома работ лорда Кельвина и вряд ли найдете обращение к какому-либо результату Чистой математики более позднего периода, чем Коши, за очень важным исключением того, что он открыл сам. Наиболее важной областью более позднего анализа, нашедшей прямое применение к физическим вопросам, является теория функций, и это опять же, насколько это необходимо для данной цели, восходит к Коши, которого я был бы склонен считать после Фурье высшим среди пионеров математической физики.

Я хотел бы иметь возможность побольше рассказать об этих мужчинах, об их характерах, превратностях их жизни и о том, как они реагировали на свою работу, свои амбиции, свою дружбу и даже на свои ссоры и ревность. Многого интересного нельзя найти в официальных сообщениях о некрологах. Иногда сохранились свидетельства этих более человеческих качеств, такие как очаровательный рассказ о начале карьеры Ампера, о трагедии, связанной со смертью его отца во время революции, и о его идиллической истории любви, и даже о слабости, приписываемой ему в более поздние годы, - о том, что он со всей невинностью таскал не тот зонтик, даже когда подходящего не было!

Можно отметить некоторые моменты, отличающиеся от нынешних условий. Научная работа была в основном академической, не столько из-за того, что мужчины, как правило, занимали официальные должности или обучались в строгих школах, сколько из-за того, что они находились под влиянием научных академий, которые ревниво охраняли допуск и тщательно изучали представленные им мемуары. Следовательно, возникла тенденция к тому, что я назвал "большим стилем", с большим вниманием к форме и представлению. Одним из результатов является то, что к их мемуарам часто даже сейчас можно обращаться с интересом, а отсутствие новизны в предмете компенсируется литературным очарованием.

Но самое большое и, я думаю, завидное отличие заключается в том, что было мало специализации и вообще отсутствовала идея разделения между чистой и прикладной математикой. Имена, которые мне так часто приходилось цитировать, свидетельствуют о том, насколько плодотворным был этот союз. И, при всем признании современных трудностей, я бы процитировал слова Фурье, но в несколько более католическом смысле, чем он имел в виду: "Исследование" утверждение природы как источника плюс обоснование математических изысканий".

Отсутствие английских названий в первой части записи часто отмечалось и вызывало сожаление. Вся история и ее уроки изложены в хорошо известной *Истории математики в Кембридже* мистера Роуза Болла. Однако мы можем с гордостью указать на более поздние достижения наших соотечественников, большинство из которых в той или иной степени

связаны с этим университетом. Уже были указаны некоторые особо характерные черты, которые, как мы можем утверждать, имеют английское происхождение, - поиск определенных геометрических образов физических отношений и особенно развитие графических методов. Я могу, в частности, упомянуть поучительные диаграммы, приложенные к трактату Максвелла и оказавшие столь большую помощь воображению его читателей и столь ценные в качестве примера для более поздних авторов.

Период, который мы рассматриваем, имел, я думаю, довольно определенное начало и почти столь же определенное завершение. С математической точки зрения его наиболее поразительным достижением является всеобъемлющая схема отношений, которая может быть применена к столь многим разнообразным предметам, всего лишь изменив названия различных понятий. В их чисто абстрактной форме, в разреженной атмосфере векторных полей, Тройных тензоров и так далее, эти соотношения можно было бы разработать почти за час, хотя их вряд ли можно понять или оценить без обращения к их физическим аспектам, которым они обязаны всей своей ценностью. То, что такая общность должна была быть достигнута, является примером постоянного стремления математики свести к простым законам бесконечное разнообразие природы. С более широким взглядом, чем это было возможно Фурье, мы можем повторить его ньютоновскую цитату: *Кто там пауцис, там мультя прэзстет геометрия славы.*

КЕМБРИДЖ: НАПЕЧАТАНО У. ЛЬЮИСОМ В UNIVERSITY PRESS